数理解析研究所講究録
1024巻 1998年 84-86

実数のβ-進展開からできる補間されたCuntz環

(joint work with Y. Katayama & Y. Watatani)

上越教育大　松本健吾 (Kengo Matsumoto)

1 定義と定理

$1<{}^\forall\beta\in\mathbb{R}$. 実数を勝手に1つ固定する。

${}^\exists n\in\mathbb{N}$; $n-1<\beta\leq n$ をとり $\Sigma_\beta=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ とおく

$f_\beta:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 区間力学系を

$$f_\beta(x)=\beta x-[\beta x] = \beta x \text{ の小数部分}, \quad x\in[0,1]$$

そこで、${}^\forall x\in[0,1]$ の β-展開 $(d_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$d_1(x)\equiv[\beta x], \quad d_n(x)\equiv[\beta f_\beta^{n-1}(x)], \quad 2\leq n\in\mathbb{N}$$

とおく。よって $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n(x)}{\beta^n}$ となる。

Σ_β の片側無限列 $(\Sigma_\beta)^{\mathbb{N}}$ 全体に、積位相と辞書式順序を入れる。

$$\zeta_\beta\equiv\sup_{x\in[0,1)}(d_n(x))_n \in(\Sigma_\beta)^{\mathbb{N}} \quad \text{とおく。}$$

定義 (β-シフト)

$$\Lambda_\beta\equiv\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\Sigma_\beta)^{\mathbb{N}} \mid \sigma^n(x)\leqq\zeta_\beta \quad {}^\forall n=0,1,2\cdots\}$$

但し、$\sigma((x_n)_n)=(x_{n+1})$ シフト。

([Pa], [Re] 参)。

このβ-シフトはサブシフトである。

定義（補間されたCuntz環：$\mathcal{O}_\beta$）

各 $1<\beta\in\mathbb{R}$ に対して，β-シフト (Λ_β, σ) に付随してできるサブシフト C^*環 $\mathcal{O}_{\Lambda_\beta}$ を $\mathcal{O}_\beta$ とかき，補間されたCuntz環（Interpolated Cuntz algebras）という。

サブシフトに付随してできる C^*環については [Ma] を参照。

例 $1<n\in\mathbb{N}$ に対し $\beta=n$ とすると，$\mathcal{O}_\beta$ は Cuntz環 $\mathcal{O}_n$ に同型

定理（[KMW]）

① $1<{}^\forall\beta\in\mathbb{R}$ で $\mathcal{O}_\beta$ は simple, purely infinite

② $K_1(\mathcal{O}_\beta)=0 \quad {}^\forall\beta$,

$$K_0(\mathcal{O}_\beta)=\begin{cases} \cdot\ \mathbb{Z}/(\eta_1+\cdots+\eta_m-1)\mathbb{Z} & \text{iff}.\ 1=\dfrac{\eta_1}{\beta}+\cdots+\dfrac{\eta_m}{\beta^m} \\ \cdot\ \mathbb{Z}/(\xi_{l+1}+\cdots+\xi_{k+1})\mathbb{Z} & \\ \quad \text{iff}\ \ 1=\dfrac{\xi_1}{\beta}+\cdots+\dfrac{\xi_l}{\beta^l}+\overbrace{\dfrac{\xi_{l+1}}{\beta^{l+1}}+\cdots+\dfrac{\xi_{k+1}}{\beta^{k+1}}}+\overbrace{\dfrac{\xi_{l+1}}{\beta^{k+2}}+\cdots+\dfrac{\xi_{k+1}}{\beta^{2k+2-l}}}^{\text{くり返す}}+\cdots & \\ \cdot\ \mathbb{Z} & \text{iff}\ \ \text{上以外} \end{cases}$$

③ $1<{}^\forall\beta\in\mathbb{R}$ で，$\mathcal{O}_\beta$ 上の Gauge 作用 α は逆温度 "$\log\beta$" のときのみ，KMS-state をもち，それはユニーク。

（$\log\beta$ はもとの β-シフトの位相的エントロピーに注意）

④ ・・・・・

他の定理，結果は [KMW] を見よ

2. 主な参考文献

[C], J. Cuntz, Simple C^*-algebras generated by isometries Comm. Math. Phys. 57(1977), 173-185

[CK], J. Cuntz and W. Krieger, A class of C^*-algebras and topological Markov chains, Invent. Math. 56(1980) 251-268

[KMW], Y. Katayama, K. Matsumoto and Y. Watatani, Simple C^*-algebras arising from β-expansion of real numbers, to appear in Erg. Th. & Dyn. Sys.

[Ma], K. Matsumoto, On C^*-algebras associated with subshifts, International J. Math. 8(1997), 357-374

[Pa], W. Parry, On the β-expansion of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11(1960), 401-416

[Re], A. Renyi, Representations for real numbers and their ergodic properties, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8(1957), 477-493.